תורת הקבוצות, תרגיל 3

1. מטרת שאלה זאת היא למצוא הוכחה נוספת לטענה שקבוצה סופית אינה שקולה לקבוצה חלקית ממש שלה.

א. הוכח שאם $x \notin A, y \notin B$ ומתקיים $A \cup \{x\} \approx B \cup \{y\}$ אז $A \approx B$.

ב. הוכח שאם $x \notin A$ ו- $A \cup \{x\}$ בת $n+1$ איברים אז A בת n איברים.

ג. הוכח (בהסתמך על הסעיפים הקודמים) שקבוצה סופית אינה שוות עוצמה לקבוצה חלקית ממש שלה.

2. תהי F פונקציה, ו-A קבוצה כך ש-$A \subseteq \mathrm{Dom}F$. הוכח שאם A בת n איברים אז $F[A]$, שהיא $\{F(x) \mid x \in A\}$, היא בת m איברים עבור מספר m, $m \leq n$.

3. תהיינה A, B קבוצות סופיות. הוכח את הטענות הבאות:

א. $A \cup B$ סופית.

ב. $A \times B$ סופית (תזכורת: $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$).

ג [רשות]. ב- $\{f \mid f : A \to B\}$ אנו מסמנים את קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-B. הוכח כי אם $z \notin A$ אז $\{f \mid f : (A \cup \{z\}) \to B\} \approx \{f \mid f : A \to B\} \times B$. (כאן A, B לא חייבות להיות סופיות).

ד [רשות]. $\{f \mid f : A \to B\}$ סופית.

4. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $A \cup B$ סופית אז A, B סופיות.

ב. אם $A \cap B$ סופית אז לפחות אחת הקבוצות A, B סופית.

5. נגדיר פונקציה $f : N \times N \to N$ באופן הבא: $f(k, l) = \frac{(k+l+1)(k+l)}{2} + k$.

א. הוכח ש-f חח"ע. (הדרכה: התבונן תחילה במקרה בו $k_1 + l_1 \neq k_2 + l_2$ ואח"כ במקרה בו $k_1 + l_1 = k_2 + l_2$).

ב. הוכח ש-f על N.

ג. [רשות] נסה למצוא עוד פונקציה $g : N \times N \to N$ שהנה חח"ע ועל N (או לפחות חח"ע).

הערה: ה"משמעות הגיאומטרית" של הפונקציה f תוסבר בהרצאה.

6. לקבוצות A, B נגדיר את **ההפרש הסימטרי** $A \triangle B$ כקבוצה $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. נגדיר יחסים R, S על כל הקבוצות כדלקמן:

ARB אסם הקבוצה $A \triangle B$ סופית, ASB אסם הקבוצה $A \triangle B$ אינסופית.

א. האם R הוא יחס שקילות?

ב. האם S הוא יחס שקילות?

תאריך ההגשה: 10.11.2004